

Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

**Кватерниони и ротације
еуклидског простора**

Ученик:
Лазар Радојевић IVд

Ментор:
Милош Ђорић

Београд, мај 2018.

Садржај

1	Увод	2
2	Основно о кватернионима	3
2.1	Векторски простор кватерниона	3
2.2	Операција множења	4
2.3	Друга својства кватерниона	6
2.4	Примене кватерниона	7
3	Изометрије у еуклидском простору	8
3.1	Ротације	8
3.2	Матрице ротације у \mathbb{E}^2 и \mathbb{E}^3	9
3.3	Ојлерова матрица	11
4	Кватерниони и група $\text{SO}(3)$	13
4.1	Кватерниони у матричном облику	13
4.2	Кватерниони и матрице ротације	14
4.3	Примери	16
4.4	$\text{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$	19
5	Хопфова фибрација	22
5.1	Увод	22
5.2	Хопфова пресликавање	22
5.3	Сфера S^3	23
5.4	S^3 , ротације и Хопфова фибрација	24
5.5	Стереографска пројекција	25
5.5.1	Увод	25
5.5.2	Пројекција S^2	26
5.5.3	Пројекција S^3	27
5.6	Визуелизација Хопфове фибрације	27
6	Ротације у \mathbb{R}^4	30
6.1	Изоклиничка декомпозиција	30
6.2	Веза са кватернионима	31
6.3	Ојлерова матрица као посебан случај	31
7	Закључак	33
	Литература	34

1 Увод

Кватерниони су први пут описани 1843. године од стране ирског математичара William Rowan Hamilton-а¹. Наиме, октобра 1843. године, шетајући са женом поред реке како би стигао на састанак, Hamilton је био веома замишљен. У глави је изучавао прву некомутативну алгебру - кватернионе. Морао је да прихвати чињеницу да је четврта димензија погодна за рад са триплетима. Коцкице су му се поклопиле. Записао је формуле кватерниона:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

на стени моста, данас познатог под енглеским називом као Broom Bridge.

Након овог величанственог открића Hamilton је био свестан значаја кватерниона у математици и физици, па је остатак свог живота провео управо у њиховом изучавању. Њихова првобитна примена је била у механици тродимензионалног простора, која је и била мотивација Hamilton-у за њихово откриће.

У овом раду се обрађују основе кватерниона, првенствено њихова алгебарска структура и специфичност некомуативности множења. У даљим поглављима је акценат на њиховој широкој примени, првенствено у пољу геометрије и описивању ротација тродимензионалног простора помоћу њих. Представљена је и Хопфова фибрација² и њена повезаност са кватернионима. У последњој секцији је осврт на употребу кватерниона у геометријама виших димензија, конкретно четвородимензионалном простору.

¹ William Rowan Hamilton (4. август 1805. - 2. септембар 1865. , Даблин, Ирска) био је ирски математичар, физичар и астроном, који је дао значајан допринос развоју алгебре, оптике и динамике.

² Heinz Hopf (19. новембар 1894. - 3. јун 1971.) је био немачки математичар који је радио у областима топологије и геометрије.

2 Основно о кватернионима

Простор кватерниона, у ознаци \mathbb{H} , јесте скуп:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

при чему важи $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Кватерниони чине четвородимензионални векторски простор, при чему је структура $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ тело (прстен без комутативности), где су операције $+$ и \cdot операције сабирања и множења кватерниона. Специфичност кватерниона јесте у њиховом начину множења - оно заправо није комутативно, што се испоставља веома корисним.

У овом поглављу ћемо постепено градити простор кватерниона и извести погодне последице. У даљим поглављима ћемо се фокусирати на њихову употребу. Уведимо стандардне алгебарске операције.

2.1 Векторски простор кватерниона

Дефиниција 2.1. Сабирање над \mathbb{H} је бинарна операција $+$ дефинисана са:

$$(\forall q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k, q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k \in \mathbb{H})$$

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

Дефиниција операције сабирања чини уређени пар $(\mathbb{H}, +)$ групоидом. Лако се показује да је алгебарска структура $(\mathbb{H}, +)$ Абелова група. Можемо дефинисати и спољну операцију множења скаларом над скупом \mathbb{H} , у ознаци $*$, према следећем правилу.

Дефиниција 2.2. Спољна операција множења скаларом над скупом \mathbb{H} је бинарна операција $*$ дефинисана са:

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H})$$

$$\alpha * q = (\alpha a) + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k.$$

Овако дефинисане алгебарске операције прати следећа теорема.

Теорема 1. Скуп $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ у односу на операције сабирања $+$ и множења скаларом $*$ чини векторски простор над пољем \mathbb{R} .

Доказ. Како је структура $(\mathbb{H}, +)$ Абелова група, остају да се докажу остала својства векторског простора која непосредно следе из дефиниција операција сабирања и множења скаларом. \square

Дакле, структура $(\mathbb{H}, +, *)$ је векторски простор над пољем реалних бројева \mathbb{R} . Како се сваки елемент скупа \mathbb{H} може на јединствен начин представити преко вредности $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, уочавамо да је скуп $\{1, i, j, k\}$ база овог векторског простора.

Векторски простор $\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k \rangle$ над \mathbb{R} , изоморфан векторском простору \mathbb{R}^4 , где је изоморфизам $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{H}$ дат са $\Phi(e_1) = 1, \Phi(e_2) = i, \Phi(e_3) = j, \Phi(e_4) = k$ је **простор кватерниона** \mathbb{H} .

2.2 Операција множења

Формалан запис кватерниона би био $q = a1 + bi + cj + dk$, али ћемо ради једноставности користити запис $q = a + bi + cj + dk$. Операцију множења кватерниона прво уводимо релацијама множења базних вектора:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

из којих се једноставним алгебарским операцијама могу извести вредности израза:

$$\begin{aligned} ij &= k, & ji &= -k, \\ jk &= i, & kj &= -i, \\ ki &= j, & ik &= -j. \end{aligned}$$

Из горе наведене једнакости закључујемо да производ било која два вектора из скупа $\{1, i, j, k\}$ можемо изразити преко тачно једног од њих (до на константан фактор $-1 \in \mathbb{R}$). Наведену чињеницу ћемо подразумевати.

Дефиниција 2.3. Бинарну операцију множења кватерниона, у ознаци \cdot , дефинишемо као:

$$\begin{aligned} (\forall q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k, q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k \in \mathbb{H}) \\ q_1 \cdot q_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k, \end{aligned}$$

што је, наравно, последица услова множења базних вектора.

Према дефиницији (\mathbb{H}, \cdot) представља групоид. Непосредно следи да је за алгебарску структуру (\mathbb{H}, \cdot) задовољена особина асоцијативности, неутрал представља кватернион $q = 1$, као и да особина комутативности није задовољена, што ћемо најбоље демонстрирати на примеру.

Пример 1.

$$\begin{aligned} (7i + 3j)(2 - i + 5k) &= 14i - 7i^2 + 35ik + 6j - 3ji + 15jk \\ &= 14i + 7 - 35j + 6j + 3k + 15i \\ &= 7 + 29i - 29j + 3k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 - i + 5k)(7i + 3j) &= 14i + 6j - 7i^2 - 3ij + 35ki + 15kj \\ &= 14i + 6j + 7 - 3k + 35j - 15i \\ &= 7 - i + 41j - 3k \end{aligned}$$

Из примера је јасно да операција множења није комутативна.

Кватернион можемо представити и на другачији начин. Наиме, за сваки кватернион $q = a + bi + cj + dk$ можемо уочити скаларни део - $a \in \mathbb{R}$, и векторски део - $v = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. У складу са тим, кватернион можемо

записивати као $q = (a, v)$, при чему је $v = (b, c, d)$. Кватернионе облика $q = (a, 0)$ називаћемо *реални кватерниони*, док су кватерниони облика $q = (0, v)$ *чисти*, односно *имагинарни* кватерниони.

Дакле, кватернион q може бити записан на више различитих начина, а то су:

$$\begin{aligned} q &= (a, v) \\ &= (a, (b, c, d)) \\ &= (a, b, c, d) \\ &= a + bi + cj + dk. \end{aligned}$$

Слично, сабирање кватерниона се такође може спроводити у складу са сваким од записа. Нека су $q_1 = (a_1, v_1)$ и $q_2 = (a_2, v_2)$ два кватерниона, тада је:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1, v_1) + (a_2, v_2) \\ &= (a_1 + a_2, v_1 + v_2) \\ &= (a_1 + a_2, (b_1, c_1, d_1) + (b_2, c_2, d_2)) \\ &= (a_1 + a_2, (b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \end{aligned}$$

У тексту изнад смо дефинисали операцију множења помоћу стандардног записа кватерниона. Уколико кватернионе запишемо у облику скаларног и векторског дела, добијамо:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + v_1) \cdot (a_2 + v_2) \\ &= a_1 a_2 + a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \cdot v_2 \end{aligned}$$

Приметимо да важи:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= (b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= -(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (c_1 d_2 - c_2 d_1)i + (b_2 d_1 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)k \\ &= -v_1 \circ v_2 + v_1 \times v_2, \end{aligned}$$

чиме добијамо формулу множења кватерниона у облику:

$$q_1 \cdot q_2 = a_1 a_2 - v_1 \circ v_2 + a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \times v_2,$$

при чему су \circ и \times стандардне ознаке за скаларно, односно векторско множење вектора у \mathbb{R}^3 . Из оваквог записа кватерниона је јасније зашто операција множења кватерниона није комутативна. Наиме, кватерниони комутирају само уколико је њихов векторски производ 0, односно уколико су њихови векторски делови линеарно зависни.

2.3 Друга својства кватерниона

Јавља се потреба за увођењем унарне операције конјуговања кватерниона, сличне оној над скупом комплексних бројева.

Дефиниција 2.4. Унарну операцију конјуговања над \mathbb{H} дефинишемо као:

$$(\forall q_1 = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H})$$

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk.$$

Над дефинисаним операцијама сабирања и множења кватерниона, операција конјугације има следећа својства:

$$\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}$$

$$\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$$

што се лако може показати сређивањем израза са леве и десне стране.

Слично као код комплексних бројева, конјугат кватерниона се може искористити за изражавање реалног и имагинарног дела. Скаларни (реални) део кватерниона $q = (a, v)$ је $a = \frac{q + \bar{q}}{2}$, а векторски (имагинарни) део је $v = \frac{q - \bar{q}}{2}$.

Приметимо да је за дати кватернион $q = a + bi + cj + dk$ вредност израза $q \cdot \bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ позитиван реалан број. Претходно својство кватерниона ћемо искористити за дефинисање норме над векторским простором кватерниона.

Дефиниција 2.5. Норму $\|\cdot\|$ над скупом \mathbb{H} дефинишемо као

$$\|q\| = \sqrt{q \cdot \bar{q}}.$$

Како је унарна операција конјуговања инволутивна, на основу дефиниције норме следи

$$\|\bar{q}\| = \sqrt{\bar{q} \cdot (\overline{\bar{q}})} = \sqrt{\bar{q} \cdot q} = \|q\|,$$

као и

$$\|pq\|^2 = pq \cdot \bar{pq} = pq \cdot \bar{q}\bar{p} = p\|q\|^2\bar{p} = \|q\|^2 p\bar{p} = \|p\|^2 \|q\|^2,$$

односно $\|pq\| = \|p\|\|q\|$, што значи да је норма над кватернионима мултипликативна.

Из свега претходног јасно можемо конструисати инверзни елемент сваког кватерниона у односу на операцију множења. Наравно, инверзан елемент кватерниону $q = 0$ није дефинисан. Инверз кватерниона q је

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

На тај начин смо доказали следеће веома важно тврђење.

Лема 2.1. Алгебарска структура $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ где је \mathbb{H} простор кватерниона, \cdot бинарна операција множења кватерниона, јесте једна група. Како операција \cdot није комутативна у скупу \mathbb{H} ова група није Абелова.

Овим смо конструисали тело $(\mathbb{H}, +, \cdot)$. Нарочиту пажњу треба посветити јединичним кватернионима, као посебној подгрупи кватерниона.

Јединични кватернион представља кватернион норме један. Дељењем не-нултог кватерниона својом нормом добија се јединични кватернион U_q :

$$U_q = \frac{q}{\|q\|}.$$

Наиме, сваки кватернион се може представити у облику $q = \|q\| \cdot U_q$. Приметимо и да за сваки јединични кватернион q важи $q^{-1} = \bar{q}$. Како су јединични кватерниони сви они норме један, они граде, геометријски посматрано, сферу S^3 у четвородимензионалном простору. Хопфова фибрација користи ово својство, што ћемо видети у наредним поглављима.

Такође, као посебну групу кватерниона треба издвојити и реалне кватернионе, мислећи при том на кватернионе облика $q = a$, $a \in \mathbb{R}$, као и чисте кватернионе, односно кватернионе облика $q = ai + bj + ck$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, који ће нам бити од користи.

2.4 Примене кватерниона

Фокус овог рада је на геометријској примени кватерниона, али они имају значај и у другим областима математике. Како је могуће делити кватернионе, они чине једну *дивизиону* алгебру или алгебру са дељењем. Ова структура је слична пољу осим што операција множења није комутативна. Дивизиона \mathbb{R} -алгебра \mathbb{H} заједно са својом нормом представља једну *нормирану дивизиону алгебру*. Нормиране алгебре су веома ретке што потврђује Хурвицова³ теорема која каже да су једине такве следеће четири: \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} и \mathbb{O} .

Такође, Хурвиц је представио прстен целих кватерниона, потпрстен од \mathbb{H} сачињен од кватерниона форме $q = a + bi + cj + dk$, где су сви a, b, c, d цели бројеви или конгруентни $\frac{1}{2}$ модул \mathbb{Z} . Ова конструкција је употребљена у доказу Лагранжове⁴ теореме - сваки природан број се може представити као сума највише 4 квадрата природна броја.

³ Adolf Hurwitz (26. март 1859. – 18. новембар 1919.) је био немачки математичар који је радио на пољу алгебре, анализе, геометрије и теорије бројева.

⁴ Joseph-Louis Lagrange (Турин, 25. јануар 1736. – Париз, 10. април 1813.) је био италијански математичар и астроном. Остварио је невероватна достигнућа у пољима анализе, теорије бројева и класичне механике. Сматра се највећим математичарем свог доба.

3 Изометрије у еуклидском простору

Сваки еуклидски афини простор чине еуклидски векторски простор, скуп тачака \mathbb{E} и пресликавање које уређени пар (тачка, вектор) слика у тачку. Еуклидски простор је сам по себи афини, али уочавањем репера тог простора, најчешће у ознаци Oe , одређујемо један векторски простор. Еуклидски векторски простор је сваки реални векторски простор \mathbb{V} , коначне димензије у коме је дефинисан скаларни производ, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Како је дефинисан скаларни производ он индукује норму, односно дужину, вектора тог простора. Наиме,

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Природно се за растојање између две тачке еуклидског простора узима норма вектора који их спаја. Еуклидску метрику $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ посматрамо као:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{E}.$$

Скаларни производ и норма нам омогућавају дефинисање угла између вектора, као

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \quad u, v \in \mathbb{V}, \theta = \angle(u, v).$$

Сада можемо увести појам изометрије. За пресликавање $\sigma : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ кажемо да је изометрија еуклидског простора \mathbb{E} ако чува растојања између тачака, тј.

$$(\forall A, B \in \mathbb{E}) \quad d(A, B) = d(\sigma(A), \sigma(B)).$$

Фиксна тачка изометрије σ је свака тачка P за коју важи $\overrightarrow{P\sigma(P)} = \vec{0}$. Такође, из услова да је пресликавање изометрија следи да оно чува норму вектора, као и углове између њих. Због тога, изометрија векторског простора пресликава његову ортонормирану базу у другу базу, која је такође ортонормирана. Зато се изометрије могу посматрати као трансформације преласка између база. Основна подела изометрија је на оне које чувају оријентисаност базе, и на оне које га мењају. Прве зовемо директним, а друге индиректним изометријама. Посебна врста изометрија су ротације.

3.1 Ротације

Ротација је директна изометрија са бар једном фиксном тачком (број фиксних тачака је различит и зависи од димензија простора и врсте ротације). Ротацију одређује скуп фиксних тачака (центар ротације) и угао ротације. Како ћемо се највише бавити ротацијама у \mathbb{E}^2 и \mathbb{E}^3 , оне могу бити ротација око тачке и осна ротација.

Ротација еуклидског простора се може посматрати као ротација тачака око центра ротације или као промена базе тог простора ротацијом. Сваки еуклидски векторски простор поседује ортонормирану базу, односно базу чији елементи су вектори јединични и ортогонални међусобно и има их колика је и димензија простора. Стандардан запис базе простора димензије

n је $e = [e_1, \dots, e_n]$. Матрица A је матрица преласка са ортонормиране базе e на ортонормирану базу f , ако и само ако је

$$A^T A = E.$$

За матрице са наведеним својством кажемо да су ортогоналне. Скуп свих ортогоналних матрица реда n у ознаци $\mathbb{O}(n)$ има структуру групе. Како је $\det A = \det A^T$ следи да је вредност детерминанте матрице 1 или -1 . Зато је и група $\mathbb{O}(n)$ подгрупа линеарне групе $\mathbb{GL}(n)$ коју чине све матрице вредности детерминанте различите од 0. Управо је подела о директним и индиректним изометријама подела на оне чија је детерминанта 1 односно -1 . Наиме, група $\mathbb{O}(n)$ није повезана, већ има две компоненте повезаности.

Веома важна група изометрија, у коју спада и ротација, је она са детерминантом 1. Назива се специјална ортогонална група и означава са $\mathbb{SO}(n)$. За групу $\mathbb{SO}(3)$ се испоставља да је повезана, али није просто повезана. Такође, она је циклична група реда 2, и њено наткривање је сфера S^3 . Остали елементи групе $\mathbb{O}(n)$ су, геометријски посматрано, комбинације ротација и рефлексација.

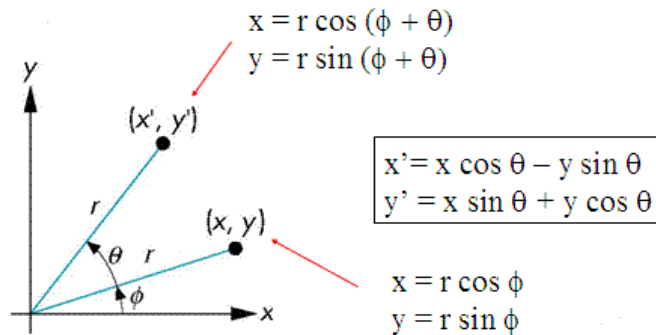
Матрица ротације R је директна, чува оријентацију, као и ортонормираност базе, па је R ортогонална матрица вредности детерминанте 1, односно закључујемо да $R \in \mathbb{SO}(n)$.

3.2 Матрице ротације у \mathbb{E}^2 и \mathbb{E}^3

Нека је R матрица ротације око тачке у равни за дати угао θ , онда је она облика

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Приметимо да она јесте ортогонална и да је $\det R = 1$.



Слика 1: Формуле ротације у \mathbb{R}^2 , као и графички приказ

Како су једине ротације у равни ротације око тачке, овим смо обухватили све ротације равни.

Нека је R матрица ротације тродимензионалног еуклидског простора. То јест, она реперу простора Oe придружује репер Of , где су e и f ортонормиране базе. Самим тим је и R ортогонална матрица вредности детерминанте 1. Та матрица се може разложити на производ матрица ротација око оса репера Oe .

Слично ротацијама у равни, ротације око оса у простору су

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_y(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & 0 & \sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega & 0 & \cos \omega \end{bmatrix},$$

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сваку ротацију тродимензионалног простора можемо разложити на композицију не више од три ротације око оса репера Oe . Та релација се зове *Ојлерово разлагање*⁵ уочене ротације у односу на неке две осе репера Oe , а тројку оријентисаних углова ротација θ , ω и ϕ називамо Ојлеровим угловима.

Ојлерови углови могу бити презентовани на два начина, у зависности да ли су око покретних оса XYZ када добијамо *унутрашње ротације* или око оса фиксираних референтног система xuz које називамо *спољашње ротације*. Линија чворова је линија нормална на осе z и Z .

Углови ϕ , θ и ω се дефинишу као:

- ϕ је угао између x -осе и линије чворова,
- θ је угао између z -осе и Z -осе,
- ω је угао између линије чворова и X -осе.

Унутрашње ротације се врше у три корака, помоћу претходно дефинисаних углова на следећи начин:

- ротација XYZ око Z -осе за угао ϕ ,
- ротација XYZ око ротиране X -осе за угао θ ,
- ротација XYZ око Z осе за угао ω .

Спољашње ротације се такође врше у три корака, притом да су ротације сада око фиксираних оса x , y и z које се на почетку поклапају са осам X , Y и Z .

- ротација XYZ око z -осе за угао ω ,
- ротација XYZ око ротиране x -осе за угао θ ,
- ротација XYZ око z осе за угао ϕ .

Ојлерова матрица представља форму матрице ротације у случају ротације око оријентисане осе. Детаљније ћемо је истражити и повезати са групом кватерниона.

⁵Леонард Ојлер (нем. Leonhard Euler Базел, 15. април 1707 — Санкт Петербург, 18. септембар 1783) је био швајцарски математичар и физичар. Живео је и радио у Берлину и Санкт Петербургу. Дошао је до великих открића у потпуно различитим областима као што су математичка анализа и теорија графова.

3.3 Ојлерова матрица

Нека је A матрица ротације у односу на уочени репер Oe простора \mathbb{E} , за оријентисани угао θ око задате оријентисане осе Δ која садржи тачку O . Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ и $c = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ јединични вектор праве Δ . Матрица те ротације у односу на ортонормирану базу $g = [a, b, c]$, са трећим вектором c је матрица R :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наведена матрица F нам је погодна за запис матрице R , наиме:

$$R = E + F \sin \theta + F^2(1 - \cos \theta).$$

Приметимо и да важи $R - R^T = 2 \sin \theta F$. Нека је P матрица преласка са ортонормиране базе e на базу g . Из претходних поглавља знамо да је матрица P ортогонална, то јест $P^T = P^{-1}$ и да је њена трећа колона управо α, β, γ . Важи и $P^{-1}AP = R$, као последица ротација у две базе. Она је облика

$$P = \begin{bmatrix} p & x & \alpha \\ q & y & \beta \\ r & z & \gamma \end{bmatrix}.$$

Како је $A = PRP^{-1}$ следи

$$A = E + PFP^{-1} \sin \theta + PFP^{-1}PFP^{-1}(1 - \cos \theta),$$

односно за $D = PFP^{-1} = PFP^T$:

$$A = E + D \sin \theta + D^2(1 - \cos \theta).$$

Како је $c = a \times b$, и $a = pe_1 + qe_2 + re_3, b = xe_1 + ye_2 + ze_3$ добијамо: $\alpha = qz - ry, \beta = rx - pz, \gamma = py - qx$. Сада након рачунања матрице D употребом добијених зависности следи

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad D^2 + E = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Уколико уочени вектор c праве Δ није нормиран, тада α, β, γ у претходним релацијама треба помножити са $\frac{1}{\|c\|}$. Извешћемо корисна својства која произилазе из оваквог записа матрице.

Траг матрице A налазимо као $\text{Tr } A = 3 + (1 - \cos \theta)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3)$, и за случај $\|c\| = 1$ добијамо:

$$\text{Tr } A = 1 + 2 \cos \theta.$$

Такође користећи односе $R - R^T = 2 \sin \theta F$ и $A = PRP^{-1}$, као и $D = PFP^{-1}$ непосредно следи да:

$$A - A^T = 2 \sin \theta D.$$

Уводећи нови параметар λ , као $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\|c\|}{\lambda}$ и изражавајући $\sin \theta$ и $\cos \theta$ преко $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ у претходним релацијама, матрица ротације се своди на

$$A = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & 2\alpha\beta - 2\lambda\gamma & 2\lambda\beta + 2\alpha\gamma \\ 2\alpha\beta + 2\lambda\gamma & \lambda^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & 2\beta\gamma - 2\lambda\alpha \\ 2\alpha\gamma - 2\lambda\beta & 2\lambda\alpha + 2\beta\gamma & \lambda^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 \end{bmatrix},$$

где је $\delta = \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Добијену матрицу зовео Ојлеровом матрицом која је одређена реалним бројем λ и не-нула вектором (α, β, γ) из \mathbb{R}^3 .

То је управо матрица ротације простора \mathbb{E}^3 у односу на репер Oe , око осе Δ одређене вектором $c = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ за угао θ за који је $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\|c\|}{\lambda}$, подразумевајући да $\lambda = 0$ има значење $\theta = \pi$. У следећем поглављу ћемо уочити везу између кватерниона и групе $\mathbb{SO}(3)$, користећи Ојлерову матрицу као везу између њих.

4 Кватерниони и група $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$

4.1 Кватерниони у матричном облику

Уз симболику из претходног поглавља, Ојлерова матрица A задовољава $\delta A = \lambda^2 E + 2\lambda D + 2D^2$, што се у матричном облику може записати као:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \lambda & -B^T \\ B & \lambda E + D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & B^T \\ -B & \lambda E + D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Како је јасан однос између две матрице са десне стране једнакости, матрица A је одређена првом матрицом из овог производа, наиме матрицом

$$q = \mathbb{K}(\lambda, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \lambda & -\alpha & -\beta & -\gamma \\ \alpha & \lambda & -\gamma & \beta \\ \beta & \gamma & \lambda & -\alpha \\ \gamma & -\beta & \alpha & \lambda \end{bmatrix}$$

реда четири над пољем \mathbb{R} . Као посебне матрице уочимо $\mathbf{1} = \mathbb{K}(1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{i} = \mathbb{K}(0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = \mathbb{K}(0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = \mathbb{K}(0, 0, 0, 1)$ односно у матричном облику:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приметимо да је свеједно да ли смо бирали прву или другу матрицу са десне стране да одреди нашу матричну репрезентацију кватерниона. Наиме, постоји 48 различитих репрезентација на овај начин. Прецизније, постоји 48 скупова четвородимензионалних матрица таквих да функција која слика $\mathbf{1}$, \mathbf{i} , \mathbf{j} , и \mathbf{k} у те матрице је хомоморфизам, тј, пресликава збир и производ кватерниона у збир и производ матрица.

Јасно је да за произвољне реалне бројеве $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$ важи

$$q = \lambda \mathbf{1} + \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k},$$

где су $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ раније уочене матрице. Такође, уз то важи и:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \begin{aligned} \mathbf{ij} &= -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{jk} &= -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{ki} &= -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Наиме, групу свих матрица $\mathbb{K}(\lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ можемо идентификовати са групом кватерниона \mathbb{H} . Њихова база је систем $\langle \mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$. Како смо већ упознати

са својствима кватерниона као алгебарске структуре, размотримо их у матричном запису.

Конјугат кватерниона у ознаци

$$\bar{q} = \lambda 1 - \alpha i - \beta j - \gamma k,$$

у матричној форми представља управо матрицу q^T . Норму кватерниона налазимо као

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\delta 1} = \sqrt{\delta}.$$

Такође, подсетимо се инверза кватерниона

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\delta}.$$

Разликујемо и реалне кватернионе, оне облика $q = \lambda 1$ и чисте кватернионе, оне облика $q = \alpha i + \beta j + \gamma k$. Следеће веома битно тврђење ће нам омогућити успостављање везе између кватерниона и еуклидског простора. Пресликавање I , задато са

$$X = (x, y, z) \xrightarrow{I} q = xi + yj + zk$$

јесте изоморфизам векторског простора \mathbb{R}^3 на векторски подпростор \mathbb{H}_0 свих чистих кватерниона. Помоћу наведеног изоморфизма, идентификујемо тачке \mathbb{R}^3 са чистим кватернионима. У претходној чињеници налазимо мотивацију за тврђење у следећој секцији.

4.2 Кватерниони и матрице ротације

Нека је A Ојлерова матрица којој одговара четворка бројева $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$. Нека је кватернион придружен тој четворци $q = \lambda + \alpha i + \beta j + \gamma k$, и нека је $P = (x, y, z)$ произвољна тачка простора \mathbb{R}^3 , а $p = xi + yj + zk$, њој придружен чист кватернион. Тада важи:

$$P' = AP \Leftrightarrow p' = qpq^{-1},$$

где су P' и p' тачке добијене датом ротацијом.

Доказ. Размотримо прво посебан случај. Нека је $P_x = (x, 0, 0)$, односно $p_x = xi$. Тада је $P'_x = AP_x = \frac{x}{\delta} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\ 2\alpha\beta + 2\lambda\gamma \\ 2\alpha\gamma - 2\lambda\beta \end{bmatrix}$, а кватернион p'_x :

$$\begin{aligned} p'_x &= qp_x q^{-1} = q(xi) \frac{\bar{q}}{\delta} = \frac{x}{\delta} (\lambda + \alpha i + \beta j + \gamma k) i (\lambda - \alpha i - \beta j - \gamma k) \\ &= \frac{x}{\delta} (\lambda i - \alpha - \beta k + \gamma j) (\lambda - \alpha i - \beta j - \gamma k) \\ &= \frac{x}{\delta} [(\lambda^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) i + (2\alpha\beta + 2\lambda\gamma) j + (2\alpha\gamma - 2\lambda\beta) k], \end{aligned}$$

што је управо кватернион који по изоморфизму I одговара $P'_x = AP_x$. Читав поступак не нарушава еквиваленцију ни у једном смеру, тако да су изрази еквивалентни. Слично се доказује тражена еквивалентност и за тачке $P_y = (0, y, 0)$ и $P_z = (0, 0, z)$. Како су све операције линеарне, из тога следи и претходно тврђење. \square

Из свега до сада можемо да закључимо следеће.

У односу на уочени репер Oe , сваку ротацију векторског простора \mathbb{R}^3 , чија оса Δ одређена вектором $c = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, садржи тачку O , можемо одредити кватернионом $q = \lambda + c'$, где је $c' = \alpha i + \beta j + \gamma k$. При том је угао ротације одређен са

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\|c\|}{\lambda}, \quad \text{за } (\lambda \neq 0),$$

где је $\theta = \pi$ за $\lambda = 0$. Како је $\|c\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, важи идентитет

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \end{aligned}$$

где је именилац разломка управо норма кватерниона те ротације. Приметимо да се за јединични кватернион q добија $\lambda = \cos \frac{\theta}{2}$ па се он може записати и у облику $q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}(\alpha i + \beta j + \gamma k)$, за $\|c\| = 1$. Овакав запис ће се испоставити врло корисним што ћемо видети у даљим поглављима.

Ротацију која одговара кватерниону q даље ћемо означавати са R_q . Приметимо да је иста ротација одређена за два кватерниона q_1, q_2 ако су они у односу $q_2 = \eta q_1$ за $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Да ли су то сви кватерниони који одређују једну ротацију?

Доказ. Смер \Leftarrow је тривијалан. Смер \Rightarrow :

За произвољу тачку $P = p_1 i + p_2 j + p_3 k$ важи $R_{q_1}(P) = R_{q_2}(P)$, па је даље:

$$q_1 P q_1^{-1} = q_2 P q_2^{-1} \Leftrightarrow P = q_1^{-1} q_2 P q_2^{-1} q_1 \Leftrightarrow P = R_{q_1^{-1} q_2}(P),$$

односно да је ротација одређена кватернионом $q_1^{-1} q_2$ коинциденција. Уколико би чист део овог кватерниона био различит од нуле то би онда била ротација око неког вектора за неки не-нулти угао, што није коинциденција. Значи $q_1^{-1} q_2 = \eta$, $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тј. $q_2 = \eta q_1$. \square

Наиме, свака ротација је јединствено одређена са тачно два јединична кватерниона, ако је један q , други је $-q$. Важи и обрнуто, односно, за било који кватернион, можемо уочити одговарајућу Ојлерову матрицу, па самим тим и одговарајућу ротацију. Наравно, свим реалним кватернионима придружимо идентично пресликавање, тј. коинциденцију.

4.3 Примери

Еуклидски векторски простор \mathbb{R}^3 је оријентисан својом базом $e = [e_1, e_2, e_3]$. Одредити матрицу ротације L за угао $\frac{\pi}{3}$ око векторске праве \mathbb{F} која је оријентрисана и одређена вектором $c = (1, 0, 1)$.

У првом решењу ћемо се служити променом базе простора. Наиме, желимо да извршимо промену базе тако да тражена ротација постане ротација око једне осе, и потом се вратимо у полазну базу. Зато, нека је нова база $g = [g_1, g_2, g_3]$, где је g_3 вектор колинеаран са c . Вектори g_1 и g_2 нису фиксни али као један вектор нормалан на g_3 можемо узети $g_2 = (0, 1, 0)$. Вектор g_1 тразимо у облику (α, β, γ) . Како треба да важи

$$\begin{cases} \langle g_1, g_3 \rangle = 0 \\ \langle g_1, g_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

вектор g_1 добијамо у облику $(\alpha, 0, -\alpha)$. Нова база g треба да буде ортонормирана па су онда $g_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, $g_2 = (0, 1, 0)$ и $g_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Матрица преласка P је тада

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Како је $\det P = 1$ она чува оријентисаност полазне базе. Матрица ротације око осе g_3 за угао $\frac{\pi}{3}$ је

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тада је тражена матрица ротације $P^{-1}LP = R$, то јест $L = PRP^{-1}$, што је заправо:

$$L = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

а након сређивања добијамо

$$L = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix}.$$

Други начин на који бисмо могли да решимо овај задатак је помоћу употребе кватерниона. Наиме, нека је кватернион $q = \lambda + \alpha i + \beta j + \gamma k$, кватернион који одређује ротацију R_q коју ћемо поистоветити са L . Тада је $\lambda = \cos(\frac{\pi/3}{2}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Такође, вектором праве $c = (1, 0, 1)$ су одређени $\alpha = p$, $\beta = 0$ и $\gamma = p$, где је p константа са тим да је $\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$.

Из претходног добијамо $2p^2 = \frac{1}{4}$ тј. $p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Коначно $q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}i + \frac{1}{2\sqrt{2}}k$. Тада је ротација R_q неке тачке простора $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ коју по изоморфизму поистовећујемо са чистим кватернионом $xi + yj + zk$ заправо:

$$\begin{aligned} R_q &= q(xi + yj + zk)q^{-1} = \frac{1}{8}(\sqrt{6} + i + k)(xi + yj + zk)(\sqrt{6} - i - k) \\ &= \frac{1}{8}[-x - z + i(x\sqrt{6} - y) + j(y\sqrt{6} - z + x) + k(z\sqrt{6} + y)](\sqrt{6} - i - k) \\ &= \frac{1}{8}[(6x - 2\sqrt{6}y + 2z)i + (2\sqrt{6}x + 4y - 2\sqrt{6}z)j + (2x + 2\sqrt{6}y + 6z)k], \end{aligned}$$

што по изоморфизму чистих кватерниона и \mathbb{R}^3 можемо поистовестити са тачком $((3x - \sqrt{6}y + z)/4, (\sqrt{6}x + 2y - \sqrt{6}z)/4, (x + \sqrt{6}y + 3z)/4)$ или у матричном запису:

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

из чега добијамо тражену матрицу ротације. Задатак смо могли решити и применом Ојлерове матрице, користећи њен сређени облик, али мотивација ових решења у извођењу, а не коришћењу готове матрице.

Нека је еуклидски простор \mathbb{R}^3 оријентисан својом канонском базом и L линеарни оператор над \mathbb{V} одређен матрицом

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$$

у односу на ту базу. Закључити да је L једна ротација тог простора и одредити њену осу \mathbb{F} , као и угао ротације θ .

Пре свега, треба проверити да је матрица A ортогонална и да је њена детерминанта 1. То јесте задовољено, што значи да је оператор L ортогоналан и да је и једна ротација. Користећи изразе које смо извели при рачунању Ојлерове матрице, знамо да је

$$\begin{aligned} A - A^T &= 2 \sin \theta D \\ \text{Tr } A &= 1 + 2 \cos \theta, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

при чему је θ угао ротације, а вектор (α, β, γ) јединични вектор правца осе ротације. Добивамо $\cos \theta = \frac{1}{2}$, и приметимо да вредност $\sin \theta \in \{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ није јединствено одређена. Ова појава се јавља јер је ротацију око осе могуће представити као ротацију око усмереног вектора те осе за угао ϕ или исто тако као ротацију око супротно усмереног вектора те осе за угао

$2\pi - \phi$. Према томе, свеједно је који угао одаберемо. Нека је $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Тада из прве једнакости добијамо

$$A - A^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix} = -\sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} = 2 \sin \theta D,$$

односно $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\gamma = 0$. Добили смо да је дата матрица, матрица ротације око вектора $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ за угао $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

Решићемо овај проблем и у другом смеру, наиме, ако је ротација око вектора $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ за угао $\theta = \frac{5\pi}{3}$ наћи њену матрицу ротације, али на другачији начин него до сад.

Приметимо да ротацијом вектора v око z осе за угао $\frac{\pi}{4}$ добијамо вектор $(0, \sqrt{2}, 0)$, који је колинеаран са y осом. Након тога је потребно извршити ротацију за дати угао, али око y осе и потом се вратити у полазно стање ротацијом за $-\frac{\pi}{4}$ око z осе. Наиме,

$$A = R_{v,\theta} = R_{z,-\frac{\pi}{4}} \circ R_{y,\theta} \circ R_{z,\frac{\pi}{4}}.$$

Како су нам познате матрице ротација око оса у \mathbb{R}^3 добијамо:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то јест, након множења матрица матрица ротације је:

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}.$$

Ово је један од метода и заснива се на ротирању око оса базе простора. У општем случају матрица има 5, јер није довољна ротација око једне осе да би вектор постао колинеаран са неком од оса. Иначе су потребне 2 ротације, па самим тим имамо 2 ротације које доводе вектор на неку од оса, 1 ротацију око те осе, и 2 инверзне ротације које враћају вектор на полазну позицију.

4.4 $\mathbb{SO}(3) \cong \mathbb{RP}^3$

У овом поглављу ћемо посматрати тополошко својство групе $\mathbb{SO}(3)$. Ради бољег разумевања описаћемо реалне пројективне просторе.

Дефиниција 4.1. Реалан пројективни простор димензије n , у ознаци \mathbb{RP}^n је скуп правих кроз координатни почетак у \mathbb{R}^{n+1} . Како свака права пресеца јединичну сферу тачно два пута, \mathbb{RP}^n можемо замислити као јединичну сферу S^n са идентификованим антиподаљним тачкама u и $-u$.

Користећи други опис, тачке у \mathbb{RP}^n поистовећујемо са паровима $\{u, -u\}$, тако да $u \in S^n$. Заправо, то је простор $S^n/\{1, -1\}$. Природно пресликавање $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$, задато је са:

$$\pi(u) = \{u, -u\}.$$

Нека са D^n означавамо затворену горњу полусферу у S^n , што је, скуп тачака $u \in S^n$ таквих да је $u_{n+1} \geq 0$. Како је бар један од u и $-u$ на D^n , можемо извршити рестрикцију π на D^n . Пресликавање π на D^n је инјективно осим на екватору, односно скупу $u \in S^n$ са $u_{n+1} = 0$. Ако је u на екватору, тада је и $-u$ такође, тј. $\pi(u) = \pi(-u)$. Дакле, \mathbb{RP}^n можемо да замислимо као горњу полусферу D^n , са идентификованим антиподаљним тачкама на екватору.

Теорема 2. *Постоји непрекидно бијективно пресликавање између $\mathbb{SO}(3)$ и \mathbb{RP}^3 .*

Доказ. Свака ротација у \mathbb{R}^3 је одређена јединичним вектором $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ и углом ротације $\theta \in [-\pi, \pi]$. Када овако задате ротације могу да буду исте?

Уколико су вектори u и v колинеарни и супротног смера, а углови ротације су им супротни. Наиме, $R_{v, -\theta} = R_{-v, \theta}$. Како тачно један од $\{\theta, -\theta\}$ припада $[0, \pi]$, једнственост добијамо додатним условом $\theta \in [0, \pi]$.

Такође, уколико су углови ротације једнаки, односно $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, важи $R_{v, \theta_1} = R_{-v, \theta_2}$. Дакле, како желимо једнственост, у случају $\theta = \pi$ треба одабрати само један од вектора $\{v, -v\}$.

Приметимо да је $R_{v, 0}$ идентитета за сваки вектор v . Зато у случају $\theta = 0$, не можемо јединствено одредити јединични вектор па ћемо коинциденцију специјално означавати са I .

Дакле, свака ротација из $\mathbb{SO}(3) \setminus I$ је јединствено одређена са четворком $(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\theta \in (0, \pi]$, осим за $\theta = \pi$. Уочимо пресликавање $\Phi : \mathbb{SO}(3) \rightarrow \mathbb{RP}^3$, задато са:

$$\Phi(I) = (1, 0, 0, 0),$$

$$\Phi(\theta, \alpha, \beta, \gamma) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \alpha \sin \frac{\theta}{2}, \beta \sin \frac{\theta}{2}, \gamma \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Како $\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 1$, кодомен $\Phi \in S^3$. Приметимо да $\cos \frac{\theta}{2} \geq$

0. За $\cos \frac{\theta}{2} > 0$, променљиве α, β и γ су произвољне, па одређују целу горњу полусферу од S^3 . У случају $\theta = \pi$, односно $\cos \frac{\theta}{2} = 0$, што је екватор на S^3 , идентификујемо тачке $(0, \alpha, \beta, \gamma)$ и $(0, -\alpha, -\beta, -\gamma)$ јер произилазе од истих ротација $R_{v,\pi} = R_{-v,\pi}$, $v = (\alpha, \beta, \gamma)$. Како смо раније идентификовали $\mathbb{R}P^3$ са полусфером од S^3 са антиподалним екватором, кодомен Φ заиста јесте $\mathbb{R}P^3$.

Пресликавање је непрекидно ако је непрекидно по координатама, што можемо применити и на пресликавање Φ . Уз то је $\lim_{\theta \rightarrow 0} \Phi(\theta, \alpha, \beta, \gamma) = \Phi(I)$, па је пресликавање Φ непрекидно. Треба доказати да је оно бијекција, односно инјективно и сурјективно.

Ако је $\phi(\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \phi(\theta_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ добијамо $\theta_1 = \theta_2$ (за $\theta \in (0, \pi)$), па даље следи једнакост осталих координата. Случај $\theta_1 = \theta_2 = 0$ је тривијалан. Када је $\theta = \pi$ могуће су две четворке $(0, \alpha, \beta, \gamma)$ и $(0, -\alpha, -\beta, -\gamma)$, али су оне идентичне и у $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ као $R_{v,\pi} = R_{-v,\pi}$, $v = (\alpha, \beta, \gamma)$. Дакле Φ је инјективно.

Нека $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}P^3$, $a \neq 1$. Тада је са

$$\cos \frac{\theta}{2} = a \quad \alpha = \frac{b}{\sqrt{1-a^2}} \quad \beta = \frac{c}{\sqrt{1-a^2}} \quad \gamma = \frac{d}{\sqrt{1-a^2}},$$

задовољено $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, па је одређена четворка бројева која се слика у полазну. За $a = 1$ имамо $\Phi(I) = (1, 0, 0, 0)$. Дакле, свака тачка из $\mathbb{R}P^3$ је слика неког елемента из домена. Због тога је пресликавање ϕ сурјективно, а због претходног и бијективно. Како су $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ и $\mathbb{R}P^3$ компактни, познато је да постоји инверзно пресликавање које је такође непрекидно, што значи да је $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ хомеоморфно са $\mathbb{R}P^3$. \square

Дакле, постоји непрекидно бијективно пресликавање између група $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ и $\mathbb{R}P^3$, тј. између група $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ и $S^3/\{1, -1\}$. Хомеоморфизам који можемо уочити између њих се односи на операције множења кватерниона и композиције ротација. Наиме, за две ротације R_p и R_q задате кватернионима p и q (свака ротација се може одредити неким кватернионом) важи:

$$R_p \circ R_q = R_{pq}.$$

Како постоји хомоморфизам и непрекидно бијективно пресликавање између датих група, важи следећа теорема.

Теорема 3. Нека је S^3 група свих јединичних кватерниона, и $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ група свих ротација еуклидског простора \mathbb{E}^3 . Тада постоји изоморфизам између група $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ и групе јединичних кватерниона у односу на операцију композиције ротација и множења кватерниона. Односно тада је:

$$\mathbb{S}\mathbb{O}(3) \cong S^3/\{1, -1\}.$$

Овом теоремом смо успоставили везу између јединичних кватерниона и групе ротација простора \mathbb{E}^3 . Као што смо раније изводили, видимо да се ротација применом кватерниона упрошћава, наиме мање пута примењујемо

множење него у матричном рачуну. Такође, кватернион одређују четири параметра, док Ојлерова матрица има девет поља, што је још једна предност кватерниона. Ова разлика је значајна у програмирању јер је потребно мање меморије за алоцирање ротације, као и мање пута примена операција множења што доводи до убрзања рада програма. Такође, ако је норма кватерниона изоморфног ротацији једнака 1, угао ротације је задат формулом

$$\theta = 2 \arccos(\lambda),$$

што је још једно поједностављење у односу на Ојлерово решење. Уколико нам је дата Ојлерова матрица, за проналажење вектора праве око које се врши ротација потребан је изван рачун, док је код кватерниона вектор правца задат самим кватернионом.

Кватерниони по својој природи припадају четвородимензионом простору \mathbb{R}^4 . Изоморфност са ротацијама у \mathbb{R}^3 нам служи као мотивација за следеће поглавље, у ком разматрамо Хопфову фибрацију.

5 Хопфова фибрација

5.1 Увод

Хофова фибрација, названа је по Хајнцу Хопфу, који је проучавао 1930-их година. Она је била велико откриће у топологији, као и веома значајан објекат у теорији Лијевих група. Хопфова фибрација има мноштво примена у физици, укључујући и квантну теорију рачунарства, данас веома популарну област.

Како је претпоставка да је за разумевање опфове фибрације потребно добро познавање апстрактне алгебре и многострукости, она углавном није доступна средњошколцима. Међутим, у овом раду ћемо се потрудити да помоћу групе кватерниона опишемо нека њена алгебарска и геометријска својства. Као занимљивост постављамо једну загонетку.

Користећи дисјунктне кругове и једну праву линију попунити тродимензионални простор тако да је сваки пар кругова уланчан и да права пролази кроз унутрашњост сваког круга.

5.2 Хопфово пресликавање

Јединичну сферу димензије n , у ознаци S^n дефинишемо као скуп тачака (x_0, x_1, \dots, x_n) у \mathbb{R}^{n+1} таквих да

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Геометрички гледано, S^1 представља јединични круг у равни, S^2 јединичну сферу у простору, а S^3 јединичну сферу у \mathbb{R}^4 што је заправо скуп јединичних кватерниона.

Хопфова фибрација је пресликавање $h : S^3 \rightarrow S^2$, задато са

$$h(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)). \quad (1)$$

Лако је проверити да је збир квадрата координата са десне стране заправо $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 1$, па та тачка заиста припада сфери S^2 .

Оригиналан проблем којим се Хопф бавио је био део теорије хомотопије. Једноставно речено, хомотопија покушава да разуме својста простора која се не мењају непрекидним деформацијама. Један начин да се одреде својства непознатог простора X јесте да се X пореди са добро познатим простором Y помоћу непрекидних пресликавања $Y \rightarrow X$. У хомотопији, два простора која могу да се трансформишу непрекидним пресликавањима једно у друго, сматрамо еквивалентним. Знајући нешто о Y и о хомотопно еквивалентним пресликавањима Y у X можемо да боље упознамо непознато X . То је један од корисних начина за анализирање простора.

Један од најтежих проблема у теорији хомотопије јесте одређивање хомотопно еквивалентних пресликавања $Y \rightarrow X$, где су X и Y сфере и X је мање димензије од Y . Многи специјални случајеви су решени, али постоје занимљиви, до сад нерешени проблеми. Хопфова фибрација $h : S^3 \rightarrow S^2$

је било револуционарно откриће у овој области. Како због њене комплексности не можемо да дамо потпуну причу овог открића, фокусираћемо се на Хопфову фибрацију у геометрији и њену везу са групом $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$.

5.3 Сфера S^3

Једначина сфере S^3 се дефинише као скуп тачака (x_0, x_1, x_2, x_3) са својством да:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Веома корисно и занимљиво својство сваке сфере је да она у свакој тачки поседује тангентни простор. Наиме, за уочени јединични кватернион p , као вектор у \mathbb{R}^4 , простор у ком леже векторни нормални на p који садрже тачку p са сфере. Тај простор ћемо означавати са T_p .

Уочимо векторе:

$$\begin{aligned} X(p) &= p \cdot i, \\ Y(p) &= p \cdot j, \\ Z(p) &= p \cdot k, \end{aligned}$$

па како је $p = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$, добијамо:

$$\begin{aligned} X(p) &= -x_1 + x_0i - x_3j + x_2k, \\ Y(p) &= -x_2 + x_3i + x_0j - x_1k, \\ Z(p) &= -x_3 + -x_2i + x_1j + x_0k. \end{aligned}$$

Приметимо да важи:

$$\begin{aligned} \langle p, X(p) \rangle &= -x_0x_1 + x_1x_0 - x_2x_3 + x_3x_2 = 0, \\ \langle p, Y(p) \rangle &= -x_0x_2 + x_1x_3 + x_2x_0j - x_3x_1 = 0, \\ \langle p, Z(p) \rangle &= -x_0x_3 + -x_1x_2 + x_2x_1 + x_3x_0 = 0, \end{aligned}$$

па како су вектори $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$ линеарно независни и димензија T_p је мања од димензије простора, добијамо да је наш тангентни простор T_p разапет векторима $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$.

Тачније,

$$T_p = \{p \cdot \alpha \mid \alpha \in \text{Im } \mathbb{H}\},$$

где скуп $\text{Im } \mathbb{H}$ представља скуп чистих, тј. имагинарних кватерниона. Због раније уоченог изоморфизма између чистих кватерниона и скупа \mathbb{R}^3 , закључујемо да је скуп јединичних чистих кватерниона изоморфан јединичној сфери у \mathbb{R}^3 , тј. сфери S^2 . Дакле, важи

$$S^2 = S^3 \cap \text{Im } \mathbb{H}.$$

Из претходног следи да је сфера S^2 утопљена у сферу S^3 .

5.4 S^3 , ротације и Хопфова фибрација

Сада ћемо дати реформулацију Хопфове фибрације у форми кватерниона, помоћу до сада изведених односа између кватерниона и ротација простора.

Фиксирајмо тачку $P = (1, 0, 0)$ на S^2 . Дати јединични кватернион q , одређен тачком (a, b, c, d) на S^3 у форми $q = a + bi + cj + dk$ одређује ротацију $R_q(P_0) = qP_0q^{-1}$. Хопфово пресликавање дефинишемо као

$$h : q \rightarrow R_q(P_0) = qP_0q^{-1}. \quad (2)$$

Докажимо прво да су формуле (1) и (2) заправо еквивалентне. Исто као и у претходном поглављу, по изоморфизму I из претходног поглавља, тачки P_0 додељујемо кватернион i , а израз qP_0q^{-1} је заправо:

$$\begin{aligned} qP_0q^{-1} &= (a + bi + cj + dk)(i)(a - bi - cj - dk) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + 2(ad + bc)j + 2(bd - ac)k, \end{aligned}$$

што је по изоморфизму I , заправо тачка у R^3 са координатама $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac))$, што је и требало доказати. Како свуда важи еквивалентност, доказали смо тврђење.

Ротација R_q пресликава тачку P_0 у другу тачку простора P , док Хопфова фибрација пресликава кватернион q који одређује ту ротацију у тачку P .

Нека је тачка $P_0 = (1, 0, 0)$ на сфери S^2 . Покушајмо да нађемо све тачке са S^3 које се пресликавају у P_0 Хопфовом фибрацијом.

Користећи формулу (1) добијамо да важи:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 1 \\ a^2 + b^2 - c^2 - d^2 &= 1 \\ 2(ad + bc) &= 0 \\ 2(bd - ac) &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} a &= \cos t \\ b &= \sin t \\ c &= d = 0, \end{aligned}$$

где $t \in \mathbb{R}$, што значи да су тачке

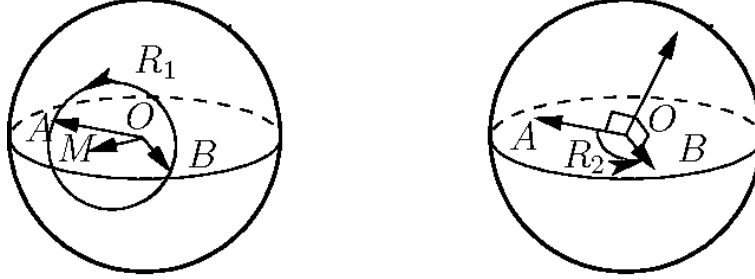
$$\{(\cos t, \sin t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

кандидати. Утврђујемо да то јесу све тачке са S^3 којима је задовољено да $h(a, b, c, d) = P_0$.

Ако боље погледамо, скуп који смо добили, $h^{-1}(P_0)$, је заправо јединични круг на сфери S^3 . Ово својство важи за сваку тачку са S^2 , односно ако тачка P припада S^2 , $h^{-1}(P)$ је круг на S^3 .

Дакле, занима нас да за две дате тачке P_0 и P_R на S^2 опишемо скуп свих ротација које сликају P_0 у P_R . Уочимо кружни лук великог круга који садржи тачке P_0 и P_R и означимо га са $\overline{P_0P_R}$. Нека је R ротација која слика P_0 у P_R . Оса ротације R је једнако удаљена од тачака P_0 и P_R , па је она подскуп симетралне равни дужи P_0P_R која сече сферу S^2 по великом кругу који полови лук \overline{AB} . У оквиру овог великог круга постоје две осе ротације које садрже центар сфере за које је једноставније израчунати угао ротације.

Прва таква оса пролази кроз средиште M лука \overline{AB} и тада је угао ротације једнак π . Назовимо ову ротацију R_1 . Друга оса је нормална на векторе $v = \overrightarrow{OA}$ и $w = \overrightarrow{OB}$ и тада је угао ротације заправо угао између вектора v и w , односно $\cos \theta = \langle v, w \rangle$ јер $\|v\| = \|w\| = 1$, $v, w \in S^2$. Нека је то ротација R_2 .



Слика 2: Графички приказ ротација R_1 и R_2

Уочимо ротације R_1 и R_2 из претходног разматрања за тачке $P_0 = (1, 0, 0)$ и $P_R = (p_1, p_2, p_3)$. Можемо да одредимо кватернионе r_1 и r_2 за које је $R_{r_1} = R_1$ и $R_{r_2} = R_2$. Углови ротација су редом π и $\cos \theta = \langle (1, 0, 0), (p_1, p_2, p_3) \rangle = p_1$, па добијамо:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} [(1+p_1)i + p_2j + p_3k]$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} \left(1 + \frac{-p_3j}{1+p_1} + \frac{p_2k}{1+p_1} \right).$$

Фибру $h^{-1}(P)$ можемо параметарски видети као $h^{-1}(P) = \{r_1 e^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ или $h^{-1}(P) = \{r_2 e^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$, што представља круг у \mathbb{R}^4 . Тиме смо показали да је скуп кватерниона који се слика у одређену тачку Хопфовом фибрацијом заправо круг. Погодна за визуелизацију Хопфове фибрације је стереографска пројекција.

5.5 Стереографска пројекција

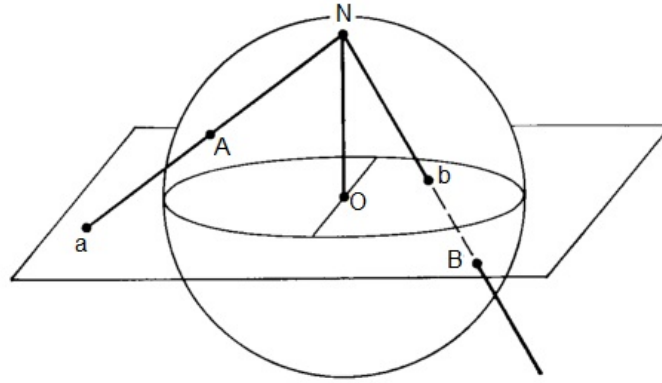
5.5.1 Увод

Стереографска пројекција је глатко и бијективно пресликавање сфере на раван. Дефинисано је на целој сфери осим у једној тачки коју називамо тачка пројекције. Наш даљи циљ је да визуелизујемо Хопфову фибрацију. Како нам четвородимензионални простор није интуитиван, користићемо стереографску пројекцију као метод визуелизације простора.

5.5.2 Пројекција S^2

Нека је тачка $P_0 = (0, 0, 1)$ пројективна тачка сфере S^2 . Нека је раван на коју пројектујемо сферу раван која садржи центар сфере O и нормална је на вектор $\overrightarrow{OP_0}$.

За тачку P са сфере њена пројекција ће бити пресек праве P_0P са датом равни. Приметимо да за тачку $P_0 = (0, 0, 1)$ нема смислене слике па вршимо рестрикцију домена на $S^2 \setminus P_0$. Можемо видети на слици како то изгледа.



Слика 3: Графички приказ стереографске пројекције сфере S^2

Ово пресликавање је аналитички задато са

$$s : (x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Доказ. Једначина праве која пролази кроз тачке P_0 и (x, y, z) је

$$\frac{X-0}{x-0} = \frac{Y-0}{y-0} = \frac{Z-1}{z-1} = t,$$

односно $X = xt$, $Y = yt$ и $Z = (z-1)t + 1$. Како тражимо пресек праве са равни одређеном са $Z = 0$, добијамо $t = \frac{-1}{z-1}$, тј. $t = \frac{1}{1-z}$. Приметимо да $z \neq 1$ јер смо извршили рестрикцију тачке $P_0 = (0, 0, 1)$. Даље добијамо $X = \frac{x}{1-z}$ и $Y = \frac{y}{1-z}$, чиме смо завршили наш доказ. \square

Приметимо да се сваки круг на S^2 који садржи пројективну тачку слика у праву, док се сваки круг који је не садржи слика у круг. То је управо важно својство стереографске пројекције које ће нам послужити при Хопфовој фибрацији, јер знамо да су кругови на S^3 заправо инверзне слике тачака са S^2 .

5.5.3 Пројекција S^3

Стереографска пројекција се уопштава и на више димензије. Мотивисани претходним делом, можемо да наслутимо како би она изгледала у четири димензије. Стереографску пројекцију сфере S^3 представља пресликавање

$$(\omega, x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{1-\omega}, \frac{y}{1-\omega}, \frac{z}{1-\omega} \right),$$

где смо за пројективну тачку узели тачку $P_0 = (1, 0, 0, 0)$. Својство да стереографска пројекција очувава кругове је задржано у свим димензијама. Из претходног поглавља знамо да су инверзне слике тачака Хопфове фибрације кругови на S^3 . Зато се они овом стереографском пројекцијом сликају у кругове (или у праву, уколико круг садржи пројективну тачку $(1, 0, 0, 0)$) у \mathbb{R}^3 .

5.6 Визуелизација Хопфове фибрације

Нека је s стереографска пројекција $s : S^3 \setminus \{(1, 0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ задата формулом $(w, x, y, z) \rightarrow (\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w})$ и нека је h раније дефинисана Хопфова фибрација. Како $h^{-1}((1, 0, 0))$ садржи тачку $(1, 0, 0, 0)$, значи да је $s \circ h^{-1}((1, 0, 0))$ права, тј. x -оса. Такође приметимо да је $K = s \circ h^{-1}((-1, 0, 0))$ јединични круг у yz равни. То директно следи из:

$$h^{-1}((-1, 0, 0)) = (0, 0, \cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$s(0, 0, \cos t, \sin t) = (0, \cos t, \sin t).$$

Даље, за сваку тачку $P = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ која је различита од тачака $(1, 0, 0)$ и $(-1, 0, 0)$ важи да је $s \circ h^{-1}(P)$ круг у \mathbb{R}^3 који сече yz раван у тачно две тачке A и B при чему је једна од њих унутар, а друга ван јединичног круга K . Како бисмо то доказали, нека је:

$$h^{-1}(p_1, p_2, p_3) = (a, b, c, d)$$

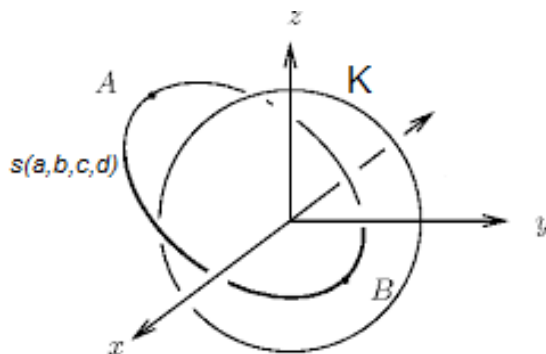
$$s(a, b, c, d) = \left(\frac{b}{1-a}, \frac{c}{1-a}, \frac{d}{1-a} \right),$$

па како тражимо тачке у пресеку са yz равни важи $\frac{b}{1-a} = 0$, тј. $b = 0$. Даље имамо

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 + d^2 &= 1 \\ a^2 - c^2 - d^2 &= p_1 \\ 2ad &= p_2 \\ -2ac &= p_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \pm \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} \\ c &= -p_3/2a \\ d &= p_2/2a \end{aligned}$$

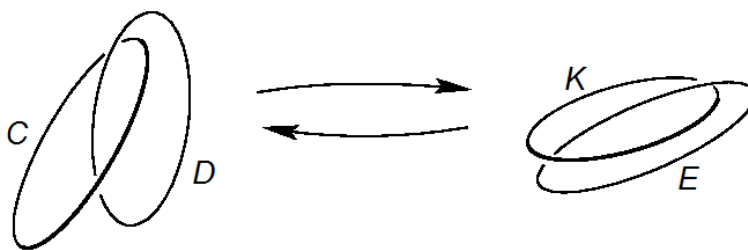
па смо тиме одредили тачке A и B . Како је растојање тих тачака до координатног почетка $\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$, у случају $a = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}}$ добијамо да је тачка ван круга K , а за $a = -\sqrt{\frac{1+p_1}{2}}$ да је тачка унутар круга K . То значи да је круг

$s \circ h^{-1}(P)$ уланчан са кругом K . Тачке A и B леже на правој кроз координатни почетак која садржи вектор $(0, p_3, -p_2)$. Приметимо да раван круга $s \circ h^{-1}(P)$ не може садржати x -осу - ако би је садржала онда би $s \circ h^{-1}(P)$ секло $s \circ h^{-1}((1, 0, 0))$, а ти скупови су дисјунктни. Одавде закључујемо да x -оса пролази кроз унутрашњост круга $s \circ h^{-1}(P)$.



Слика 4: Пресек круга са равни yz

Да бисмо доказали да су сваке две пројектоване фибре, односно кругови C и D , уланчани, уочимо непрекидно инјективно пресликавање $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ које слика круг C у круг K , а D у неку другу пројектовану фибру E , где је E круг. Како је E уланчан са K , онда и C и D морају бити уланчани јер је повезаност тополошка инваријанта, па ће кругови остати уланчани и након дејства непрекидним бијективним пресликавањем. Поменуто пресликавање Φ дефинишемо као $s \circ f \circ s^{-1}$ где је $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ и $f(x) = kr^{-1}x$ (мисли се на кватернионско множење) и ако је P произвољна тачка са круга C и са r је означено $s^{-1}(P)$.



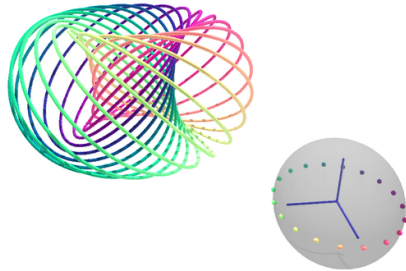
Слика 5: Уланчаност је постигнута између свака два круга

Овим смо решили загонетку постављену у уводу овог поглавља.

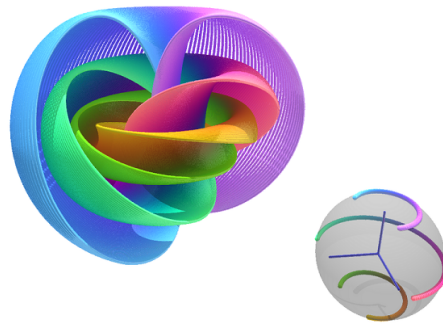
Веома лепа визуализација је направљена од стране Niles Johnson-a⁶ На сфери десно су задате тачке са S^2 , а велика слика представља стереографску

⁶Слике су преузете из његове Youtube анимације - <https://youtu.be/AKotMPGFJYk>

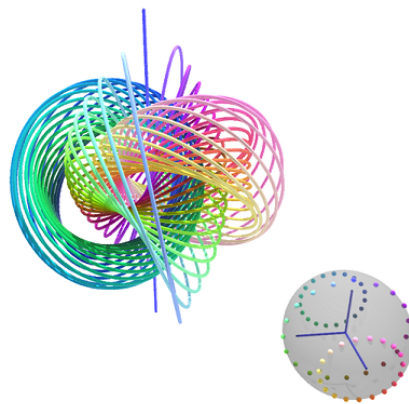
пројекцију Хопфове фибрације сваке од тачака.



Слика 6: Приказ дискретног скупа тачака



Слика 7: Приказ непрекидног скупа тачака са сфере S^2



Слика 8: Приказ који садржи пројекцију пројективне тачке

6 Ротације у \mathbb{R}^4

Како смо у претходним поглављима постепено анализирали појмове ротације, кватерниона, сфере S^3 , логичан наставак би био посматрање ротација у \mathbb{R}^4 . Кватерниони су нам били довољни за описивање ротација у \mathbb{R}^3 , али испоставиће се да се помоћу њих могу описати и ротације \mathbb{R}^4 .

6.1 Изоклиничка декомпозиција

Из претходних поглавља знамо да се ротација у \mathbb{R}^4 може представити ортогоналном матрицом. Нека је матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

нека матрица ротације простора \mathbb{R}^4 . Тада за њену такозвану асоцирану матрицу M важи да је $4M$ заправо матрица

$$\begin{bmatrix} a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} & +a_{10} - a_{01} - a_{32} + a_{23} & +a_{20} + a_{31} - a_{02} - a_{13} & +a_{30} - a_{21} + a_{12} - a_{03} \\ +a_{10} - a_{01} + a_{32} - a_{23} & -a_{00} - a_{11} + a_{22} + a_{33} & +a_{30} - a_{21} - a_{12} + a_{03} & -a_{20} - a_{31} - a_{02} - a_{13} \\ +a_{20} - a_{31} - a_{02} + a_{13} & -a_{30} - a_{21} - a_{12} - a_{03} & -a_{00} + a_{11} - a_{22} + a_{33} & +a_{10} + a_{01} - a_{32} - a_{23} \\ +a_{30} + a_{21} - a_{12} - a_{03} & +a_{20} - a_{31} + a_{02} - a_{13} & -a_{10} - a_{01} - a_{32} - a_{23} & -a_{00} + a_{11} + a_{22} - a_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица M је ранга 1 и као 16-димензиони вектор је норме 1 акко је матрица A матрица ротације \mathbb{R}^4 . Доказ овога не наводимо, али је овај поступак и крајњи резултат познат као *Ван Елфринхоф-а*⁷ формула.

У том случају постоје реални бројеви a, b, c, d и p, q, r, s такви да је

$$M = \begin{bmatrix} ap & aq & ar & as \\ bp & bq & br & bs \\ cp & cq & cr & cs \\ dp & dq & dr & ds \end{bmatrix}$$

и $(ap)^2 + (aq)^2 + \dots + (ds)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = 1$. Тада је матрица ротације једнака

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{bmatrix}.$$

Прва матрица у декомпозицији представља лево-изоклиничку ротацију, док друга представља десну-изоклиничку ротацију. Како је матрица A ортогонална матрица ротације, закључујемо да је $\det A = 1$. Због тога је производ детерминанти леве и десне изоклиничке матрице једнак 1. Ове матрице ротације нас подсећају на кватернионе у матричном облику.

⁷Van Elfrinkhof- холандски математичар који је извео дату формулу 1897.

Како прву матрицу карактерише (a, b, c, d) њој ћемо придружити кватернион $q_l = a + bi + cj + dk$. Слично претходном, десно-изоклиничкој матрици придружујемо кватернион $q_r = p + qi + rj + sk$. Тиме матрицу ротације A можемо посматрати кроз њој придружене кватернионе q_l и q_r , при услову да је производ норми кватерниона, као и производ детерминанти матрица једнак 1, односно $\|q_l\| \|q_r\| = 1$.

6.2 Веза са кватернионима

Изоморфизам између кватерниона и простора \mathbb{R}^4 , као векторских простора, тривијално је задат са

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow x + yi + zj + tk \in \mathbb{H}.$$

Слично као и код ротација тродимензионалног простора, помоћу датог изоморфизма, можемо кватернионима да оперишемо ротације над \mathbb{R}^4 . То потврђујемо следећом теоремом.

Теорема 4. *Нека је $P = (x, y, z, t)$ дата тачка у \mathbb{R}^4 и $p = x + yi + zj + tk$ њој придружен кватернион по изоморфизму. Нека је A матрица ротације \mathbb{R}^4 и нека су њој придружени кватерниони $q_l = a + bi + cj + dk$ и $q_r = p + qi + rj + sk$. Тада важи:*

$$P' = AP \Leftrightarrow p' = q_l p q_r.$$

Доказ. Доказ следи из *Ван Елфринхоф*-е формуле и њеног поступка који је већ наведен горе. Множењем кватерниона као матрица добијамо жељену еквивалентност. \square

Ротације у \mathbb{R}^4 можемо вршити множењем кватерниона, под условом да је производ њихових норми једнак 1. Слично као и код ротација у \mathbb{R}^3 , уочавамо јединичне кватернионе као представнике класа. Дакле и лево-изоклиничке ротације и десно-изоклиничке ротације посматрамо као елементе S^3 .

6.3 Ојлерова матрица као посебан случај

Како ротацију \mathbb{R}^3 видимо као посебан случај ротације \mathbb{R}^4 са фиксираном четвртом координатом, њу можемо представити као:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Након *Ван Елфринхоф*-овог поступка добијамо $p = a, q = -b, r = -c, s = -d$, из чега закључујемо да је $q_r = q_l^{-1}$. Тада матрица ротације постаје нама

добро позната Ојлерова матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & 2\alpha\beta - 2\lambda\gamma & 2\lambda\beta + 2\alpha\gamma \\ 2\alpha\beta + 2\lambda\gamma & \lambda^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & 2\beta\gamma - 2\lambda\alpha \\ 2\alpha\gamma - 2\lambda\beta & 2\lambda\alpha + 2\beta\gamma & \lambda^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 \end{bmatrix},$$

где су $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^4$ заменили стандардне ознаке (a, b, c, d) . Наравно, како је $q_r = q_l^{-1}$, а $Q = q_l = \lambda + \alpha i + \beta j + \gamma k$ је баш кватернион придружен Ојлеровој матрици, тада је формула ротације тродимензионалног простора \mathbb{R}^3

$$p' = Q p Q^{-1} = \frac{1}{\|Q\|} Q p \bar{Q},$$

што смо знали из претходних поглавља али смо доказали на другачији начин.

7 Закључак

Као што смо могли видети у овом раду, кватерниони су применљиви у разним областима математике. Испостављају се корисним, не само у простору \mathbb{E}^3 , већ и у \mathbb{E}^4 . Потрудио сам се да их на што бољи начин приближим читаоцу и притом претежно користим математику разумљиву и јасну средњошколцима. Посебно бих се захвалио свом ментору Милошу Ђорићу на помоћи приликом израде матурског рада и прибављању литературе, као и брату Миодрагу који ми је такође помогао током самог писања рада.

Литература

- [1] An elementary introduction to the Hopf Fibration, David W. Lyons, Department of Mathematical Sciences, Lebanon Valley College
https://nilesjohnson.net/hopf-articles/Lyons_Elem-intro-Hopf-fibration.pdf
- [2] Matrix Groups For Undergraduates, Kristopher Tapp
- [3] Wikipedia: Quaternion
<https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- [4] Wikipedia: Rotations in 4-dimensional Euclidean space
https://en.wikipedia.org/wiki/Rotations_in_4-dimensional_Euclidean_space
- [5] Geometry, David A.Brannan, Matthew F.Esplen, Jeremy J.Gray
- [6] The Hopf fibration - Niles Johnson
<https://youtu.be/AKotMPGFJYk> <http://www.nilesjohnson.net>
- [7] Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, Graduate - B. Hall
- [8] Линеарна алгебра примери и задаци, Гојко Калајџић
- [9] Кватерниони и њихова примена у геометрији, дипломски рад, Владимир Илић, Математички факултет у Београду
- [10] Елементаран увод у Хопфову фибрацију, семинарски рад, Катарина Лукић, Математички факултет у Београду